Chapitre 17 : Mouvement dans un champ de gravitation newtonien


Tycho Brahé (1546-1601), représenté à gauche, a réalisé un grand nombre d'observations astronomiques d'une grande précision pour l'époque (avant l'invention de la lunette par Galilée), et mesuré notamment les positions des planètes. L'étude du mouvement de la planète Mars est réalisée par Johannes Kepler (1571-1630), représenté à droite, qui en déduit les lois qui portent son nom. Ces trois lois seront fondamentales dans l'établissement de la loi de la gravitation universelle par Isaac Newton (1642-1727), qui démontrera notamment que les trajectoires planétaires elliptiques impliquent une loi d 'attraction en $\frac{1}{r^2}$.

Plan du cours

À savoir	
Connaître les conséquences de la conservation du moment cinétique : mouvement plan, loi des aires.	I.3
Connaître l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel).	I.1
Énoncer les lois de Kepler pour les planètes et les transposer au cas des satellites.	III.1

À savoir faire	
Établir à partir du théorème du moment cinétique la conservation du moment cinétique d'un point matériel soumis à un seul champ de force centrale.	I.3 **TD6**
Établir les conséquences de la conservation du mom. cin. : mouvement plan, loi des aires.	I.3
Établir les expressions de l'énergie potentielle gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel).	I.1 **TD1**
Exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire une énergie potentielle effective.	II.2 **TD2,4,6**
Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective. Relier le caractère borné à la valeur de l'énergie mécanique.	II.3,4 **TD2,6**
Déterminer les caractéristiques des vecteurs vitesse et accélération du centre de masse d'un système en mouvement circulaire dans un champ de gravitation newtonien.	III.2 **TD1,2,3**
Établir et exploiter la troisième loi de Kepler dans le cas particulier de la trajectoire circulaire.	III.2 **TD2,5**
Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement circulaire.	III.2 **TD1,2**
Justifier la localisation d'un satellite géostationnaire dans le plan équatorial. Établir l'altitude d'un satellite géostationnaire.	III.3 **TD2**

Cadre de l'étude

Dans ce chapitre, nous ferons deux hypothèses pour étudier l'interaction entre deux corps O et M, de masses respectives m_O et m :

1. L'ensemble de ces deux corps $\{(O, m_O); (M, m)\}$ constitue un système isolé. C'est-à-dire que l'on négligera l'influence des autres corps.
2. Nous nous placerons dans le cas où O est beaucoup plus massif que M ($m_O \gg m$). Dans ce cas, il sera possible de considérer que O est fixe dans un référentiel galiléen.

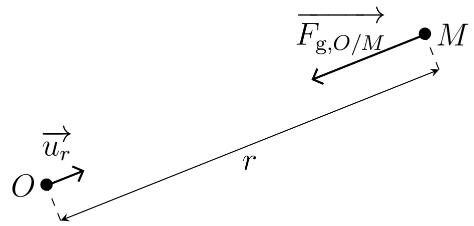
I Champ de gravitation newtonien

I.1 Rappels

Définition

Force d'interaction gravitationnelle :
La force gravitationnelle exercée par un point matériel O fixe de masse m_O sur un point matériel M de masse m est :

$$\overrightarrow{F_{g,O/M}} = -G\frac{m_O m}{r^2}\overrightarrow{u_r}$$



avec G = constante de gravitation universelle = $6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}}$

Remarque

- L'interaction gravitationnelle est toujours attractive.

Définition

Force conservative :
Une force est conservative lorsque son travail entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de la position de ces deux points. C'est le cas s'il existe une fonction énergie potentielle E_p qui vérifie :

$$\delta W\left(\vec{f}\right) = -\mathrm{d}E_p$$

où $\delta W\left(\vec{f}\right)$ représente le travail élémentaire de la force $\vec{f}$ lors d'un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\vec{r}$.

Méthode

Pour établir l'expression de la fonction énergie potentielle :

① Calculer le travail de la force $\overrightarrow{f_C}$ entre deux points A et B quelconques :

$$\mathcal{W}_{A\to B}(\overrightarrow{f_C}) = \int_{M\in\widehat{AB}} \overrightarrow{f_C}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

② Mettre l'expression obtenue sous la forme : $\mathcal{W}_{A\to B}(\overrightarrow{f_C}) = -\left[E_p(B) - E_p(A)\right]$
③ Identifier l'énergie potentielle à une constante additive près.

Application directe :
Déterminer l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle dont dérive la force gravitationnelle, en fixant la référence d'énergie potentielle nulle à l'infini.

I.2 Force centrale

Définition

Force centrale :
Une force centrale de centre O est une force dont la droite d'action passe constamment par un point O fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$. Le point O est appelé centre de force.

Une force centrale étant colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OM}$, il est judicieux d'utiliser les coordonnées sphériques de centre O pour étudier des problèmes à force centrale.

En posant $r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ et $\overrightarrow{u_r} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{r}$, une force centrale s'écrit : $\overrightarrow{f} = f\overrightarrow{u_r}$

Remarque
- La force gravitationnelle est un type particulier de forces centrales conservatives appelées **forces newtoniennes**.
- La force coulombienne (qui régit l'interaction électrostatique) est également une force newtonienne.

Définition

Forces newtoniennes :
- Les forces centrales conservatives qui s'expriment en coordonnées sphériques sous la forme :

$$\overrightarrow{f} = -\frac{k}{r^2}\overrightarrow{u_r}$$

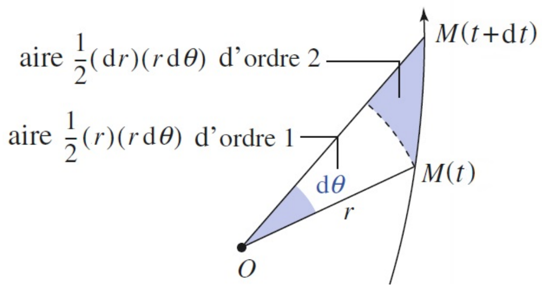
sont appelées **forces newtoniennes**.
- Les forces newtoniennes dérivent d'une énergie potentielle $E_p(r) = -\dfrac{k}{r} + \text{constante}$
- Dans le cas de l'interaction gravitationnelle, $k = Gm_O m$
($k = -\dfrac{q_O q}{4\pi\varepsilon_0}$ pour l'interaction électrostatique)

I.3 Conséquences du caractère central de la force gravitationnelle

Démonstration :
En utilisant le théorème du moment cinétique par rapport au centre de force O, montrer que le moment cinétique du point M se conserve.

Démonstration :
En utilisant la conservation du moment cinétique et la propriété du produit vectoriel, justifier que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{v(M/\mathcal{R})}$ sont toujours contenus dans le même plan que l'on précisera. En déduire que le mouvement est plan.

Démonstration :
Montrer en utilisant le schéma ci-dessous que l'aire balayée par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ pendant le durée dt vaut $\mathrm{d}\mathscr{A} = \frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta$.
En posant $\dfrac{\left\|\overrightarrow{L_O(M/\mathcal{R})}\right\|}{m} = r^2\dot{\theta} = C$, montrer que l'aire balayée par unité de temps vaut $\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{A}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{C}{2}$.

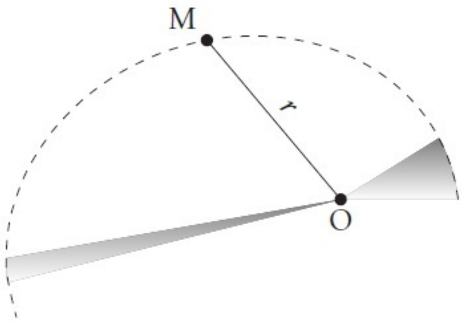


Propriétés

Conservation du moment cinétique :
Le moment cinétique $\overrightarrow{L_O(M/\mathcal{R})}$ du point M par rapport au centre de force de gravitation se conserve au cours du mouvement.

Conséquences sur le mouvement du point matériel M :

- Le mouvement est **plan** : il a lieu dans le plan contenant le centre de force O et perpendiculaire au moment cinétique par rapport à O. Le plan du mouvement est imposé par les conditions initiales $\overrightarrow{OM}(t=0)$ et $\vec{v}(t=0)$.
- Le mouvement suit la **loi des aires** : le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ balaye des aires égales en des temps égaux.



L'aire balayée par $\overrightarrow{OM}$ par unité de temps (notée $\frac{\mathrm{d}\mathscr{A}}{dt}$) est appelée vitesse aréolaire, elle vaut :

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{A}}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{C}{2}$$

où $C = r^2\dot{\theta}$ est la constante des aires

Remarques

- Le moment cinétique par rapport au centre de force O étant conservé au cours du mouvement, l'équation $r^2\dot{\theta}$ = constante constitue une intégrale première du mouvement.
- Le moment cinétique étant constant, on détermine sa valeur en utilisant un instant particulier pour lequel on connaît la position et la vitesse (on utilise souvent les conditions initiales).
- Pour un point matériel soumis à une force conservative, l'énergie mécanique est également une constante du mouvement (→ chapitre 9). L'énergie mécanique étant constante, on détermine sa valeur en utilisant un instant particulier pour lequel on connaît la position et la vitesse (souvent les conditions initiales).

II Énergie mécanique et énergie potentielle effective

II.1 Expression de l'énergie mécanique en coordonnées polaires

Ayant montré que dans le cas d'un mouvement à force centrale le mouvement est plan (par conservation du moment cinétique), on peut exprimer le vecteur vitesse en coordonnées polaires en fonction des variables r et θ :

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$

L'énergie mécanique du système s'écrit donc :

$$E_m = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + E_p(r)$$

D'après la conservation du moment cinétique, on a également $r^2\dot{\theta} = C$ (avec C = constante).
En combinant ces deux expressions on obtient :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_p(r)$$

⇒ Bien que le problème soit à deux degrés de liberté (r et θ), l'utilisation des lois de conservation permet de le ramener à une équation exprimée uniquement en fonction de la variable r (alors que le PFD donne un système de 2 équations différentielles couplées). On peut donc résoudre complètement le problème à condition de connaître $E_p(r)$.

II.2 Création d'une énergie potentielle effective

Dans l'expression de E_m établie ci-dessus, le terme $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$ correspond à l'énergie cinétique d'un point matériel dont le mouvement serait purement radial, c'est-à-dire uniquement selon $\overrightarrow{u_r}$.
En posant $E_{p,\text{eff}} = \dfrac{1}{2}m\dfrac{C^2}{r^2} + E_p(r)$, on peut réécrire l'énergie mécanique sous une forme qui ressemble à celle d'un mouvement purement radial.

Définition

Énergie potentielle effective : L'énergie mécanique d'un système soumis à une force centrale conservative peut s'écrire sous la forme :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r)$$

avec $E_{p,\text{eff}}(r)$ l'**énergie potentielle effective** qui ne dépend que de la distance r entre le centre de force et M, et des constantes du problème (m, C, ...) : $E_{p,\text{eff}} = \dfrac{1}{2}m\dfrac{C^2}{r^2} + E_p(r)$

Remarque

- Le fait d'écrire l'énergie mécanique sous la forme précédente est très pratique : cela permet une discussion qualitative simple sur la nature du mouvement sans résoudre explicitement les équations du mouvement.

Méthode

Comment construire une énergie potentielle effective ?

① Déterminer l'expression de l'énergie cinétique dans le système de coordonnées adapté à l'étude.

② En utilisant la constante des aires, éliminer $\dot{\theta}$ et mettre l'énergie mécanique sous la forme

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r)$$

avec $E_{p,\text{eff}}(r)$ l'énergie potentielle effective à exprimer en fonction de $E_p(r)$, m, r et C et qui ne dépend que de r (notamment pas de θ, ni de $\dot{\theta}$).

Exercice de cours Ⓐ : $E_{p,\text{eff}}$ dans le cas de l'attraction gravitationnelle

Déterminer l'énergie potentielle effective du point matériel M de masse m, en interaction avec un point matériel O de masse m_O.

II.3 États liés et états de diffusion

Méthode : Exploitation graphique (I)

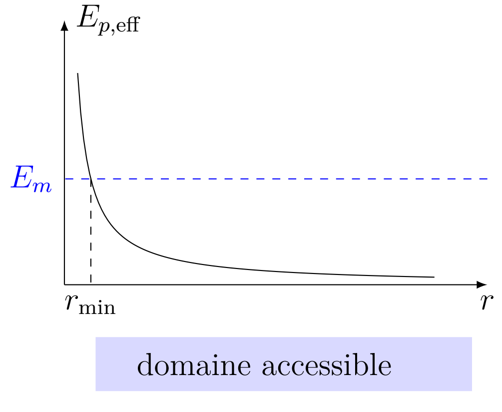
Domaine de r accessible :

Le terme $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$ étant toujours positif, le domaine des valeurs de r accessible au mouvement est celui pour lequel :

$$E_{p,\text{eff}} \leq E_m$$

Graphiquement, cette inégalité entraîne que le point matériel M ne peut accéder qu'aux valeurs de r pour lesquelles la courbe d'énergie potentielle effective est en dessous de la droite horizontale d'ordonnée E_m.

Exemple : Le graphique ci-contre montre l'énergie potentielle effective en fonction de la distance au centre de force dans le cas d'un champ de forces répulsif ($E_p(r)$ et $\frac{mC^2}{2r^2}$ étant des fonctions décroissantes, $E_{p,\text{eff}}$ est également décroissante).

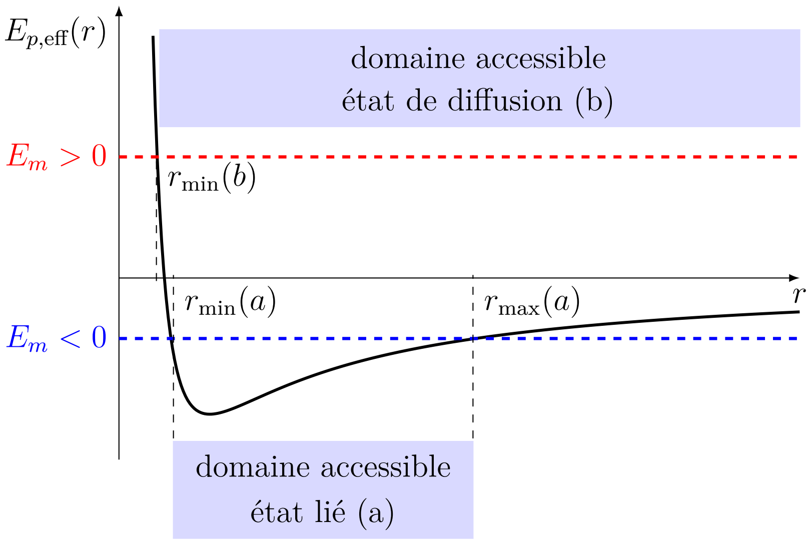


Exploitation graphique (II)

État lié - état de diffusion :

- Lorsque r est encadré entre deux valeurs extrêmes, la trajectoire est bornée. La particule se trouve dans un **état lié** $\rightarrow$ cas a) sur le graphique ci-contre.
- Lorsque r n'a pas de borne maximale, la trajectoire n'est pas bornée. La particule se trouve dans un **état de diffusion** $\rightarrow$ cas b) sur le graphique ci-dessous.

Exemple : Le graphique ci-dessous montre l'énergie potentielle effective en fonction de la distance au centre de force dans le cas d'un champ de forces attractif.

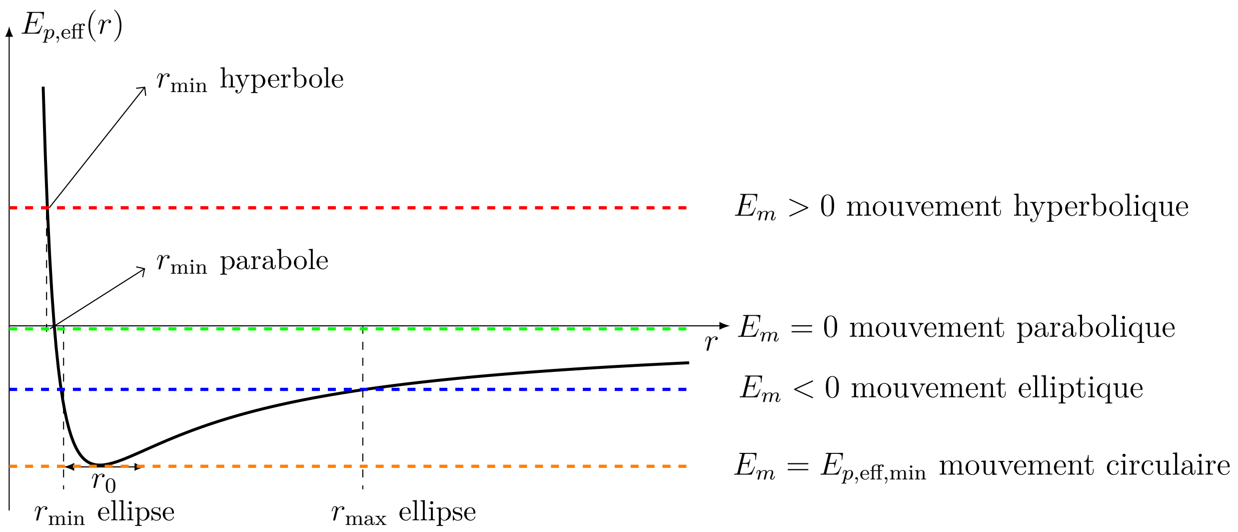


Exploitation graphique (III)

Trajectoires possibles dans le cas d'un champ de force attractif :

La nature du mouvement dépend de E_m :

- Le graphe $E_{p,\text{eff}}(r)$ passe par un minimum pour $r = r_0$, la trajectoire est circulaire.
- Si $E_m > 0$, M est dans un état de diffusion : M peut se rapprocher de O à la distance minimale d'approche puis s'éloigner à l'infini. La trajectoire est une hyperbole.
- Si $E_m < 0$, M est dans un état lié : M et O resteront à distance finie, $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$. La trajectoire est une ellipse.
- Si $E_m = 0$, on est à la limite entre état lié et état de diffusion. La trajectoire est une parabole.



II.4 Description qualitative du mouvement radial avec $E_{p,\text{eff}}$

Méthode

Comment décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de $E_{p,\text{eff}}$?

① Calculer les constantes du mouvement C et E_m à partir des conditions initiales.

② Déterminer l'expression de l'énergie potentielle effective $E_{p,\text{eff}}$ du système.

— Exprimer l'énergie mécanique E_m à une date quelconque.

— Éliminer $\dot{\theta}$ dans l'expression de E_m en introduisant la constante des aires C.

— Identifier $E_{p,\text{eff}}(r)$ comme la somme de l'énergie cinétique liée au mouvement orthoradial et de l'énergie potentielle ($E_{p,\text{eff}}(r) = E_m - \frac{1}{2}m\dot{r}^2$).

③ Étudier l'énergie potentielle effective en fonction de r et tracer son graphe.

④ Représenter sur le même graphe la droite horizontale représentant l'énergie mécanique (selon sa valeur, et notamment son signe).

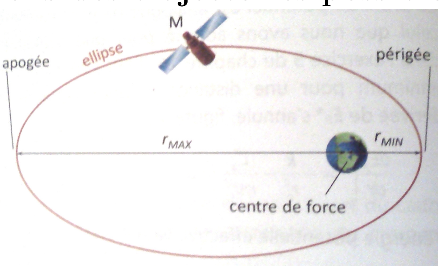
⑤ Les valeurs permises de r sont telles que $E_{p,\text{eff}}(r) \leq E_m$.

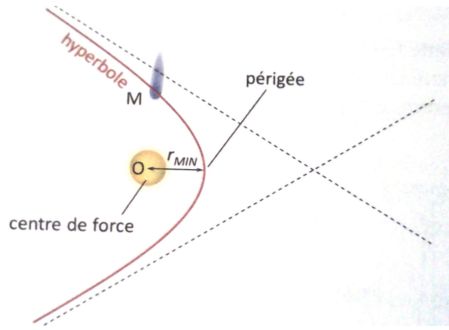
Exercice de cours Ⓑ : Interaction gravitationnelle

On s'intéresse à l'étude du mouvement d'un point matériel M de masse m (ou du centre d'une planète/d'un satellite) en interaction gravitationnelle avec un astre de centre O et de masse m_O. On se place dans le référentiel galiléen dans lequel O est fixe.

1. Établir l'expression de l'énergie potentielle effective.
2. Faire l'étude de la fonction $E_{p,\text{eff}}(r)$ (limites, variations, extremum).
3. Tracer l'allure de $E_{p,\text{eff}}(r)$.
4. Compte tenu de l'expression de E_m, déterminer les distances r accessibles en fonction de la valeur de l'énergie mécanique et de $E_{p,\text{eff}}(r)$.
5. Décrire les mouvements possibles selon la valeur de l'énergie mécanique en utilisant « état lié » et « état de diffusion », dans les cas : $E_m > 0$; $E_m = 0$; $E_m < 0$ et $E_m = E_{p,\text{eff},min}$.

Illustrations des trajectoires possibles :





Une particule soumise à une force centrale attractive et newtonienne dont l'énergie mécanique est négative décrit une ellipse dont le centre de force occupe l'un des foyers.

Une particule soumise à une force centrale attractive et newtonienne dont l'énergie mécanique est positive décrit une branche d'hyperbole dont le centre de force occupe le foyer le plus proche.

Remarque

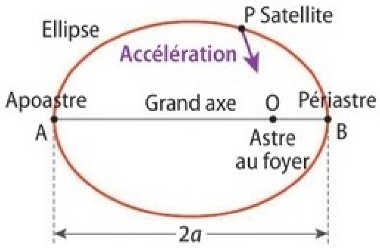
- Des conclusions similaires peuvent être établies si on étudie le mouvement d'une particule chargée soumise à une interaction électrostatique attractive ($q_O q < 0$)

III Applications à la mécanique céleste

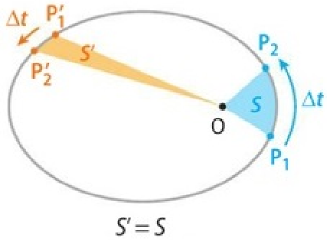
III.1 Les lois de Kepler

Johannes Kepler (1571 - 1630) fut l'assistant de l'astronome danois Tycho Brahé. Vers 1600, alors qu'il était réfugié à Prague suite à des persécutions religieuses, Brahé lui demanda de calculer l'orbite précise de Mars, dont la trajectoire présentait la plus grande excentricité parmi les planètes connues, ce qui était considéré comme une anomalie à une époque où l'on pensait que les orbites des planètes étaient parfaitement circulaires.
Il fallut six ans à Kepler pour achever son travail. A partir d'observations très précises, il établit de façon empirique trois lois qui décrivent le mouvement des planètes. Ces lois furent publiées dans Astronomia Nova en 1609 et confirmèrent la théorie héliocentrique de Nicolas Copernic.

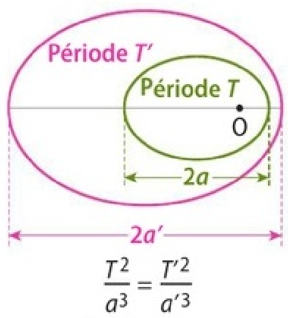
Lois de Kepler



1re loi :
Chaque planète du système solaire décrit une orbite elliptique dont le soleil est l'un des foyers.
(a est le demi-grand axe de l'ellipse)



2e loi :
Les aires balayées par la ligne Soleil-planète pendant des intervalles de temps égaux sont égales.



3e loi :
Le carré de la période de révolution d'une planète autour du soleil est proportionnel au cube du grand axe de l'ellipse qu'elle décrit :

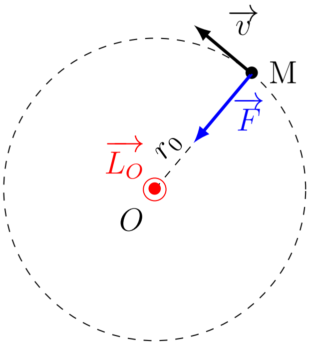
$$\frac{T^2}{a^3} = \text{constante} = \frac{4\pi^2}{GM_s}$$

où T est la période de révolution elliptique de la planète autour du Soleil, a le demi grand-axe de la trajectoire elliptique et M_s la masse du Soleil (la masse de la planète n'intervient pas).

Remarques

- Écrites par Kepler pour décrire le mouvement des planètes autour du Soleil, ces lois se transposent au cas des satellites terrestres :
  - Les satellites de la Terre décrivent une orbite elliptique dont la Terre est l'un des foyers.
  - Les aires balayées par la ligne Terre-satellite pendant des intervalles de temps égaux sont égales.
  - Le carré de la période de révolution d'un satellite autour de la Terre est proportionnel au cube du demi-grand axe de l'ellipse qu'elle décrit, soit : $\dfrac{T^2}{a^3} = \text{constante} = \dfrac{4\pi^2}{GM_T}$
- Seule intervient la masse du centre attracteur dans la 3e loi (pas celle des « objets » en orbite).

III.2 Cas particulier du mouvement circulaire

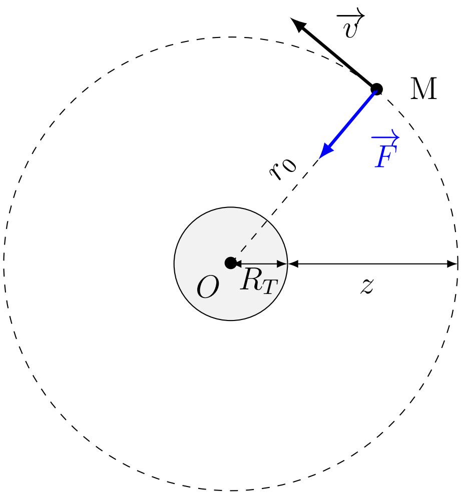


La trajectoire étant circulaire, on a $r = OM = r_0 =$ constante, c'est un état lié.

Dans le cas d'un champ newtoninen pour lequel $E_p(r) = -\frac{k}{r}$, il faut impérativement $k > 0$, c'est à dire une force attractive.

Démonstration :
Démontrer, en utilisant la conservation du moment cinétique, que la vitesse du point matériel M en orbite circulaire autour de O est constante.

Démonstration :
Établir, en utilisant le principe fondamental de la dynamique, l'expression de la norme du vecteur vitesse d'un satellite M de masse m en orbite circulaire autour de la Terre modélisée par un point matériel O de masse m_O.



Démonstration :

Sachant que le mouvement est uniforme, établir l'expression de la période du mouvement (durée mise par M pour faire un tour autour du centre de force). Retrouver la 3e loi de Kepler.

Démonstration :

Établir l'expression de l'énergie mécanique du point M en mouvement circulaire autour du centre de force O.

Formule

L'énergie mécanique d'un corps de masse m en interaction gravitationnelle avec un corps de masse m_O et en mouvement circulaire de rayon r_0 s'écrit :

$$E_m = -\frac{Gmm_O}{2r_0}$$

Remarques

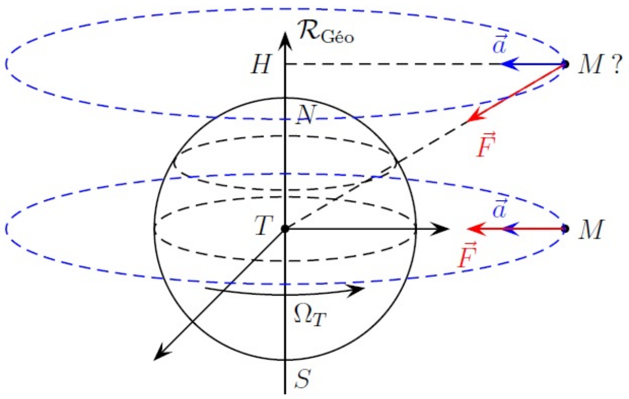
- On a également les relations : $E_m = \dfrac{E_p}{2} = -E_c$.
- Cette expression est valable pour les champs newtoniens en écrivant $E_m = -\dfrac{k}{2r_0}$.
- Dans le cas d'une interaction coulombienne attractive, on a $k = -\dfrac{qq_O}{4\pi\varepsilon_0}$
- L'expression de $E_c = \dfrac{k}{2r_0}$ permet de retrouver l'expression de v pour un mouvement circulaire uniforme.

III.3 Cas particulier du satellite géostationnaire

Définition

Satellite géostationnaire : c'est un satellite qui reste constamment au-dessus d'un même point de la surface terrestre, il est géostationnaire donc immobile par rapport à un observateur immobile de la Terre.

Démonstration :
Justifier que le plan du mouvement d'un satellite géostationnaire est nécessairement celui du plan équatorial.



Démonstration :
Déterminer l'altitude d'un satellite géostationnaire.

III.4 Vitesses cosmiques

Définition

Première vitesse cosmique, notée v_{c1} :
C'est la vitesse en orbite basse = la vitesse minimale qu'il faut donner à un satellite pour le mettre en orbite autour d'un astre. Cela correspond à un satellite en mouvement circulaire à une altitude très petite devant le rayon de l'astre.

Démonstration :
Établir l'expression de la première vitesse cosmique. Faire l'application numérique pour la Terre.

Définition

Deuxième vitesse cosmique ou vitesse de libération notée v_{c2} :
C'est la vitesse minimale à communiquer à un objet situé initialement à la surface de la planète pour qu'il puisse échapper à l'attraction de la planète, autrement dit pour qu'il puisse partir de la planète et s'en éloigner à l'infini.

Démonstration :
Quelle est la valeur minimale de l'énergie mécanique pour que le système quitte l'attraction de l'astre ?

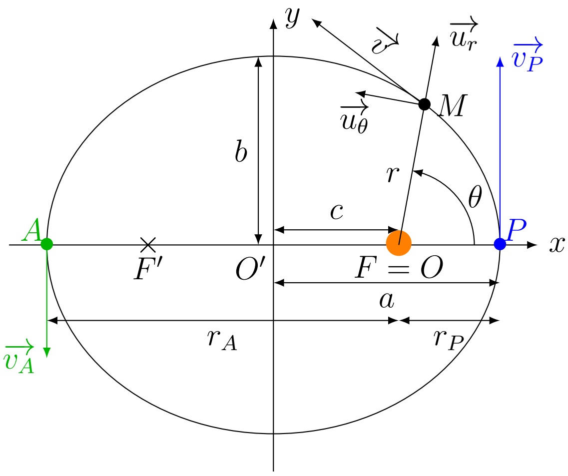
Démonstration :
En déduire l'expression de la vitesse de libération. Faire l'application numérique pour la Terre.

Valeurs à connaître

1^re^ vitesse cosmique = vitesse en orbite basse : $v_{c1} = 7{,}9\,\mathrm{km/s}$
2^e^ vitesse cosmique = vitesse de libération : $v_{c2} = 11\,\mathrm{km/s}$

III.5 Les mouvements elliptiques

a) Description



Une **ellipse** est une courbe plane qui peut être décrite par plusieurs équations (équivalentes) :

Équation cartésienne dans le plan $(O'xy)$: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, avec a le demi-grand axe et b le demi petit axe.

Équation paramétrique dans le plan $(O'xy)$: $\begin{cases} x(t) &= a\cos(\omega t) \\ y(t) &= b\sin(\omega t) \end{cases}$

Équation polaire $r(\theta) = \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta)}$ avec p le paramètre de l'ellipse et $e = \dfrac{c}{a}$ l'excentricité.

Une ellipse possède deux foyers F et F', tels que $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Définitions

Le point de la trajectoire le plus éloigné du centre de force O est appelé l'apoastre : aphélie si O est le Soleil, apogée si O est la Terre, ...

Le point de la trajectoire le plus proche du centre de force O est appelé le périastre : périhélie si O est le Soleil, périgée si O est la Terre, ...

b) Période du mouvement elliptique

La démonstration de la 3^e loi de Kepler dans le cas d'un mouvement elliptique est hors programme, et nous admettons donc la généralisation de ce qui a été montré pour un mouvement circulaire, en remplaçant le rayon du cercle par le demi-grand axe de l'ellipse.

Formule

Pour tout corps en mouvement elliptique autour du centre de force O de masse m_O, le rapport de la période T sur le demi-grand axe a du mouvement elliptique de M, $\dfrac{T^2}{a^3}$, est une constante qui ne dépend que de la masse du centre de force.

c) Énergie mécanique sur le mouvement elliptique

Démonstration :

Établir l'expression de l'énergie mécanique dans le cas d'un mouvement elliptique en fonction, notamment, du demi-grand axe a.

Le demi-grand axe est relié au rayon au périhélie r_P et au rayon à l'aphélie r_A par : $r_A + r_P = 2a$.

Nous allons chercher à exprimer r_A et r_P en fonction de E_m .

L'énergie mécanique s'écrit $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Gm_Om}{r}$.

L'énergie mécanique étant une constante du mouvement, E_m a donc la même valeur en A et en P :

$$E_m = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{Gm_Om}{r_A} = \frac{1}{2}mv_P^2 - \frac{Gm_Om}{r_P}$$

En A et en P le rayon r est extrémal, donc $\dot{r}_A = \dot{r}_P = 0$, la vitesse est donc orthoradiale en A et P : $\overrightarrow{v(M/\mathcal{R})} \perp \overrightarrow{OM}$ en A et P.

Le moment cinétique de M par rapport au centre de force est constant et s'écrit :
- en A : $\overrightarrow{L_O(M/\mathcal{R})} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v(M/\mathcal{R})} = mr_Av_A\overrightarrow{u_z}$
- en P : $\overrightarrow{L_O(M/\mathcal{R})} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v(M/\mathcal{R})} = mr_Pv_P\overrightarrow{u_z}$

Ainsi la constante des aires s'écrit : $C = r_Av_A = r_Pv_P$.

Ainsi en A et P, l'énergie mécanique s'écrit : $E_m = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r_A^2} - \frac{Gm_Om}{r_A} = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r_P^2} - \frac{Gm_Om}{r_P}$

Résolvons l'équation $E_m = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{Gm_Om}{r}$, d'inconnue r et dont r_A et r_P sont les deux solutions.

Ramenons nous à une équation du deuxième degré :
$E_mr^2 = \frac{mC^2}{2} - Gm_Omr \Leftrightarrow E_mr^2 + Gm_Omr - \frac{mC^2}{2} = 0$,

dont le discriminant est : $\Delta = (Gm_Om)^2 + 2mC^2E_m$, et qui est nécessairement positif puisque r_A et r_P sont les deux racines.

Les deux racines réelles (r_P et r_A) sont, en notant que $r_A > r_P$:
$r_A = \frac{-Gm_Om - \sqrt{(Gm_Om)^2 + 2mC^2E_m}}{2E_m}$ et $r_P = \frac{-Gm_Om + \sqrt{(Gm_Om)^2 + 2mC^2E_m}}{2E_m}$

On en déduit donc $a = \frac{r_P + r_A}{2} = \frac{2 \times -\frac{Gm_Om}{2E_m}}{2} = \frac{-Gm_Om}{2E_m} \Leftrightarrow E_m = -\frac{Gm_Om}{2a}$

♥ Formule

L'énergie mécanique d'un corps de masse m en interaction gravitationnelle avec un corps de masse m_O et en mouvement elliptique de demi-grand axe a s'écrit :

$$E_m = -\frac{Gm_Om}{2a}$$