TD du chapitre 18

Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 Formules et applications numériques

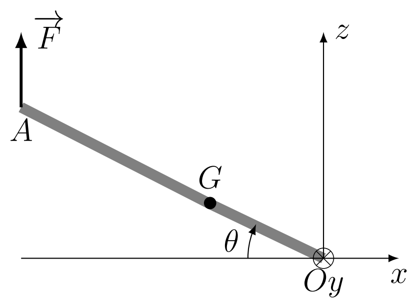
Q1. Un hélicoptère Robinson R44 nécessite au décollage une puissance $P = 180\,\text{cv}$ avec des pales tournant environ à $7{,}0\,\text{tr}\cdot\text{s}^{-1}$. Sachant qu'un cheval vapeur (1 cv) vaut $736\,\text{W}$, quel est le couple exercé par le moteur sur les pales ?

Q2. Dans le référentiel géocentrique, on assimile la Terre à une boule homogène de masse $M_T = 6{,}0 \times 10^{24}\,\text{kg}$ et de rayon $R = 6380\,\text{km}$ tournant autour de l'axe des pôles avec une période $T = 86\,164\,\text{s}$. Sachant que son moment d'inertie est $J = \frac{2}{5} M_T R^2$, déterminer l'énergie cinétique de rotation de la Terre.

Q3. Un tambour de machine à laver de rayon $R = 25\,\text{cm}$ et de masse $m = 5\,\text{kg}$ tourne à la vitesse angulaire de $1000\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$. Calculer son moment cinétique par rapport à son axe de rotation sachant que son moment d'inertie par rapport à cet axe vaut $J = mR^2$.

Exercice n°2 Installation d'un mur

On utilise une grue pour dresser un mur en béton préfabriqué à la verticale.
Le mur est initialement posé sur le sol ($\theta = 0$). La grue le soulève en exerçant une force $\overrightarrow{F}$ toujours verticale appliquée en A. Le mur pivote alors autour de l'axe (Oy) fixe.
Le mur est de hauteur $H = OA = 3{,}0\,\text{m}$, de masse $m = 5{,}0 \times 10^3\,\text{kg}$ et son centre de masse G se situe à $OG = a = 1{,}2\,\text{m}$ de la base. Le moment d'inertie du mur par rapport à l'axe (Oy) est $J = 2{,}8 \times 10^3\,\text{kg}\cdot\text{mm}^2$.
On néglige tous les frottements.



Q1. Faire un bilan des actions mécaniques exercées sur le mur.

Q2. Appliquer la loi du moment cinétique au mur par rapport à l'axe Oy. En déduire l'équation différentielle vérifiée par θ.

Q3. Le mur pivote autour de sa base (Oy) avec une vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega_0 = 0{,}20\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ constante. Déterminer et calculer la norme de la force $\overrightarrow{F}$ exercée par la grue.

Q4. Exprimer la puissance de la force $\overrightarrow{F}$ puis le travail W effectué par la grue pour dresser le mur à la verticale. Calculer W.

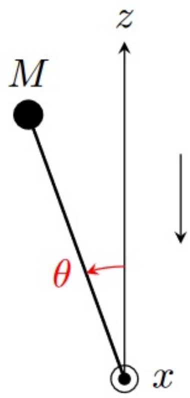
Exercice n°3 Étude d'une poulie

Une masse $m = 5{,}0\,\text{kg}$ est suspendue à l'extrémité d'une corde enroulée sur une poulie de masse $m_P = 1{,}0\,\text{kg}$ et de rayon $R = 10\,\text{cm}$ en liaison pivot idéale autour de son axe Oz avec un support fixe. Le moment d'inertie de la poulie par rapport à son axe vaut $I = \dfrac{1}{2}m_P R^2$.

1. Faire un schéma.
2. On suppose que la poule est en rotation uniforme autour de son axe fixe Oz à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$. Quelle est la vitesse de la masse m ?
3. Cette poulie est retenue par un opérateur. Quelle force l'opérateur doit-il exercer sur la poulie pour l'empêcher de tourner ?
4. Avec le même dispositif l'opérateur lâche la poulie. Déterminer l'accélération angulaire du cylindre, l'accélération linéaire de la masse et la tension de la corde.

Exercices ★

Exercice n°4 Gravimètre de Holweck-Lejay



Instrument ancien, un gravimètre de Holweck-Lejay est constitué d'une tige de longueur L, libre de tourner autour d'un axe Ox, au bout de laquelle est placée en M une masse m. On négligera le moment d'inertie de la tige et on ne tiendra compte que de la masse située à son extrémité. Par ailleurs, un ressort spirale, non représenté sur le dessin, tend à retenir la tige en position verticale en exerçant sur la tige un couple $M_x = -C\theta$ autour de l'axe de rotation. On admet que ce couple dérive de l'énergie potentielle $Ep = \dfrac{1}{2}C\theta^2$.

Q1. Exprimer l'énergie potentielle totale de la masse m en fonction de l'angle θ.

Q2. Montrer que les positions d'équilibre $\theta_{\text{éq}}$ de la tige sont solution de l'équation :

$$\sin\theta_{\text{éq}} = \frac{C}{mgL}\theta_{\text{éq}}$$

Q3. Justifier, par exemple par un raisonnement graphique, qu'il existe trois positions d'équilibre si $C/mgL < 1$ et une seule sinon. Prévoir qualitativement leur stabilité.

Q4. Démontrer que la position d'équilibre $\theta = 0$ n'est stable que si $C/mgL > 1$.

Q5. Établir par une méthode énergétique l'équation du mouvement de M .

Q6. Supposons que la raideur du ressort spirale et les conditions initiales garantissent un mouvement de faible amplitude. Déterminer la période des oscillations en termes de $g_0 = C/mL$ et expliquer l'utilisation de l'appareil en gravimètre, c'est-à-dire comme appareil de mesure des variations de g.

Exercice n°5 Toupie lancée avec un fil

Toto joue avec une toupie qu'il fait tourner à l'aide d'un fil inextensible entouré sur le corps de la toupie. Celle-ci est assimilable à un cylindre de masse m et de rayon R. Une pointe métallique de masse négligeable permet à la toupie de tenir sur le sol horizontal. Pendant tout son mouvement, la toupie reste verticale. Toto enroule le fil (4 tours) puis tire sur le fil avec une force de norme F constante. On note ω la vitesse angulaire instantanée de la toupie.
Toto commence à exercer la force à la date $t = 0$, la toupie étant initialement immobile.

Q1. Exprimer la puissance instantanée de la force $\overrightarrow{F}$.

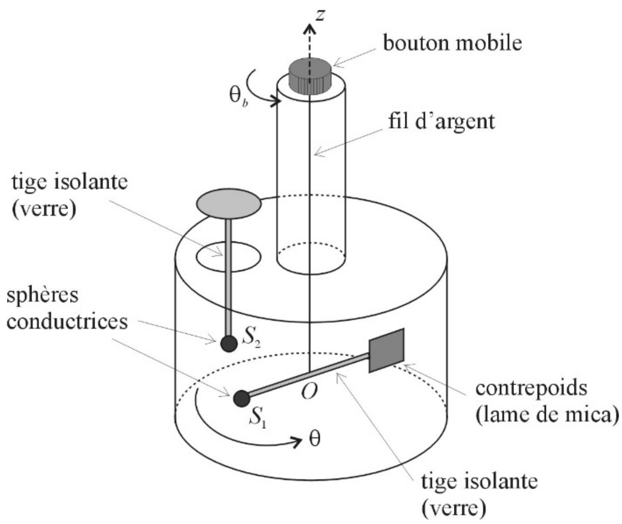
Q2. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique et en déduire l'accélération angulaire de la toupie.

Q3. Quelle est la vitesse angulaire de la toupie quand tout le fil a été déroulé ? (4 tours)

Exercices ★ ★

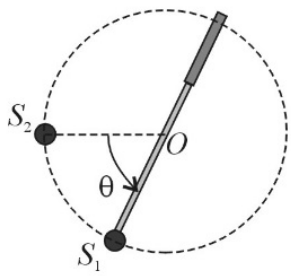
Exercice n°6 Balance de Coulomb

La balance de Coulomb est le dispositif expérimental qui permit à Coulomb d'établir la loi de variation de la force électrostatique entre deux charges en fonction de leur distance. Elle comprend une tige de verre suspendue à un fil d'argent très fin, constituant un pendule de torsion. La tige porte à l'une de ses extrémités une petite sphère métallique S_1 et à l'autre une lame de mica faisant contrepoids (de sorte que le centre d'inertie de l'ensemble « tige + S_1 + contrepoids » est au point de fixation O du fil sur la tige). L'ensemble est placé dans un cylindre de verre pour être protégé des courants d'air. Une bande de papier graduée (non représentée sur la figure) permet de repérer la position angulaire θ de la tige. L'extrémité supérieure du fil est liée à un bouton mobile, pouvant tourner autour de l'axe Oz et dont la position est repérée par l'angle θ_b. θ et θ_b sont comptés positivement dans le sens direct autour de Oz.



1re phase de l'expérience de Coulomb :
Le système est initialement au repos : $\theta = \theta_b = 0$ et la torsion du fil est nulle. On introduit alors une deuxième sphère conductrice S_2 qui a été au préalable chargée électriquement ; S_2 entre en contact avec S_1 et lui cède une partie de sa charge électrique. Dès lors S_1 porte une charge du même signe que S_2 et elle est repoussée par celle-ci, ce qui provoque la mise en rotation du pendule. Celui-ci oscille puis se stabilise à une position d'équilibre $\theta = \theta_1$.

On assimile S_1 et S_2 à des charges ponctuelles, de même valeur q ; de plus on considère que S_2 occupe la position qui est celle de S_1 lorsque $\theta = 0$ (figure ci-contre, vue de dessus).



Q1. Exprimer l'énergie potentielle d'interaction électrostatique entre les deux sphères en fonction de q, $a = OS_1$ et θ.

Q2. Exprimer l'énergie potentielle du fil de torsion en fonction de θ et C constante de raideur du fil d'argent. On rappelle que $\theta_b = 0$ dans cette phase de l'expérience.

Q3. En déduire une équation donnant la position d'équilibre θ_1 . On ne cherchera pas à résoudre cette équation. Cet équilibre est-il stable ?

Q4. Exprimer la force électrostatique exercée par S_1 sur S_2 . La représenter sur un schéma et calculer son moment par rapport Oz . Retrouver l'équation donnant θ_1.

Q5. Application numérique : $\theta_1 = 36\ ^\circ$; $C \approx 10^{-4}$ SI ; $a = 12\,\text{cm}$. Quel est l'ordre de grandeur de q ?

2e phase de l'expérience :

On tourne très lentement le bouton mobile de manière à amener la sphère S_1 à la position $\theta_2 = \dfrac{\theta_1}{2} = 18\ ^\circ$, la position du bouton mobile est alors θ_{b2}.

Q6. Dans quel sens doit-on tourner le bouton mobile ?

Q7. Montrer que la distance S_1S_2 est pratiquement divisée par 2 lors de cette opération.

Q8. Dans la loi de Coulomb, la force d'interaction entre deux charges électriques est inversement proportionnelle à leur distance mutuelle élevée à une certaine puissance α (préciser laquelle). Pour confirmer expérimentalement la valeur de α quelle valeur θ_{b2} doit-on trouver ? Faire l'application numérique.

Exercice n°7 Mouvement amplifié sur une balançoire

Un enfant debout sur une balançoire est schématisé par un pendule oscillant sans frottement autour d'un axe de rotation horizontal. Quand la balançoire passe par un maximum d'élongation, l'enfant fléchit brusquement ses genoux (la distance de son centre de masse à l'axe est alors a_1 et son moment d'inertie par rapport à l'axe J_1, position 1) ; quand la balançoire passe par le point le plus bas, l'enfant se redresse brusquement parallèlement à la corde tendue (la distance de son centre de masse à l'axe est alors a_2 et son moment d'inertie par rapport à l'axe J_2, position 2).

Q1. Faire un schéma. Comparer a_1 et a_2 d'une part, et J_1 et J_2 d'autre part et en déduire la valeur du coefficient $K = \dfrac{J_2 a_2}{J_1 a_1}$ par rapport à l'unité.

Au passage par le point le plus bas ($\theta = 0$) le moment des forces extérieures par rapport à l'axe (réaction d'axe et surtout poids de l'enfant) est nul : le moment cinétique pendant ce court intervalle de temps est donc conservé.

Q2. Quelle relation cela entraîne-t-il ? Comparer au passage des positions 1 et 2 les vitesses angulaires ω_1 et ω_2 ainsi que les énergies cinétiques E_{c1} et E_{c2} ; d'où vient l'énergie ?

Q3. Initialement la balançoire est écartée de la direction verticale d'un angle θ_0 et la vitesse angulaire est nulle. Au bout de combien de passages par la verticale peut-elle espérer atteindre la position horizontale ?

Exercice n°8 Marche sur un manège

Un manège (sans aucun dispositif moteur) est constitué d'un disque de rayon R, de masse M et moment d'inertie J_{Oz} , en pivot parfait autour de l'axe Oz. Un rayon a été peint sur le sol du manège. Initialement le manège est au repos., et un enfant de masse m est immobile sur le bord du manège, au niveau du rayon. Un adulte est immobile sur le sol à côté. L'enfant commence à se déplacer sur la périphérie du manège et s'arrête lorsqu'il a fait 1 tour (c'est à dire lorsqu'il est revenu au niveau de l'adulte). De combien a tourné le manège ?