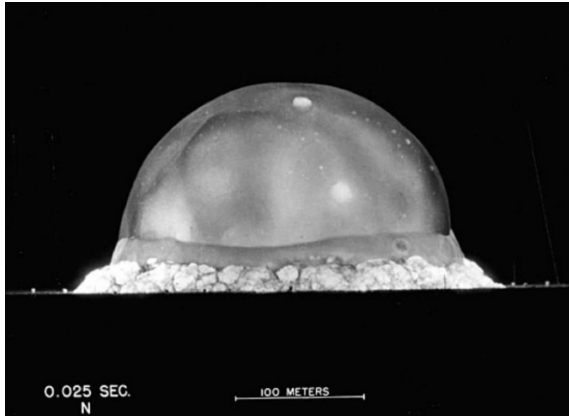


Dimensions et unités

La nécessité d'un système d'unités cohérent au niveau international a abouti à la mise en place du système international SI en 1960. Aujourd'hui, toutes les unités sont définies à partir de phénomènes physiques.



La dernière partie du chapitre concerne un outil très utile en physique : l'analyse dimensionnelle, qui a par exemple permis d'estimer l'énergie dégagée par lors du premier essai nucléaire de l'histoire. L'explosion eut lieu le 16 juillet 1945 à Alamogordo au Nouveau Mexique, dans une zone désertique nommée Jornada del Muerto. Étant l'ultime étape du projet Manhattan, lancé par les États-Unis durant la seconde guerre mondiale, les données concernant ce projet était classées ultra-secrètes par la CIA.

Pourtant, le physicien anglais G. I. Taylor a pu estimer l'ordre de grandeur de l'énergie dégagée par cette explosion

par une analyse dimensionnelle judicieuse sur la base d'un film. Le film permet de suivre au cours du temps le rayon $R(t)$ du « nuage » formé par l'explosion.

→ article de David Louapre du blog « Science étonnante » <https://scienceetonnante.com/2021/10/01/analyse-dimensionnelle/>

Plan du cours

I Dimension d'une grandeur physique 1

II Conversions d'unités 3

III Analyse dimensionnelle 4

III.1 Équation aux dimensions 4

III.2 Homogénéité d'un résultat 4

III.3 L'analyse dimensionnelle 5

I Dimension d'une grandeur physique

♥ Définition

Dimension : c'est la grandeur physique associée à un objet physique, elle renseigne sur sa nature physique.

Exemple : une distance, une altitude ont pour dimension une longueur.



Remarques

- Seules des grandeurs de même dimension peuvent être comparées. Elles sont alors dites homogènes.
- La dimension d'une grandeur physique est plus générale que l'unité : la même grandeur peut s'exprimer avec des unités très différentes (par exemple une longueur peut s'exprimer en mètre, en mile, en angström, etc).
- L'unité est indispensable pour renseigner sur la valeur de la grandeur physique : une valeur sans son unité associée est inutile.

- Une grandeur purement numérique, comme le rapport de deux longueurs, est dite sans dimension ou adimensionnée.

♥ Système International d'Unités

Il y a 7 **dimensions de base** définies par le BIMP (Bureau International des Poids et Mesures, site ici : <https://www.bipm.org/fr/measurement-units/>), à partir desquelles on peut exprimer la dimension de n'importe quelle grandeur physique. 7 **unités de base** sont associées aux 7 grandeurs de base :

Grandeur physique	Symbole	Unité SI
Longueur	L	mètre (m)
Masse	M	kilogramme (kg)
Temps	T	seconde (s)
Intensité du courant	I	ampère (A)
Température	θ	kelvin (K)
Quantité de matière	N	mole (mol)
Intensité lumineuse	J	candela (cd)



LA SECONDE

La seconde, symbole s, est l'unité de temps du SI. Elle est définie en prenant la valeur numérique fixée de la fréquence du césium, $\Delta\nu_{Cs}$, la fréquence de la transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133 non perturbé, égale à 9 192 631 770 lorsqu'elle est exprimée en Hz, unité égale à s^{-1} .

LE KELVIN

Le kelvin, symbole K, est l'unité de température thermodynamique du SI. Il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la constante de Boltzmann, k , égale à $1,380\,649 \times 10^{-23}$ lorsqu'elle est exprimée en $J\,K^{-1}$, unité égale à $kg\,m^2\,s^{-2}\,K^{-1}$, le kilogramme, le mètre et la seconde étant définis en fonction de h , c et $\Delta\nu_{Cs}$.

LE MÈTRE

Le mètre, symbole m, est l'unité de longueur du SI. Il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la vitesse de la lumière dans le vide, c , égale à 299 792 458 lorsqu'elle est exprimée en $m\,s^{-1}$, la seconde étant définie en fonction de $\Delta\nu_{Cs}$.

LA MOLE

La mole, symbole mol, est l'unité de quantité de matière du SI. Une mole contient exactement $6,022\,140\,76 \times 10^{23}$ entités élémentaires. Ce nombre, appelé « nombre d'Avogadro », correspond à la valeur numérique fixée de la constante d'Avogadro, N_A , lorsqu'elle est exprimée en mol^{-1} .

LE KILOGRAMME

Le kilogramme, symbole kg, est l'unité de masse du SI. Il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la constante de Planck, h , égale à $6,626\,070\,15 \times 10^{-34}$ lorsqu'elle est exprimée en $J\,s$, unité égale à $kg\,m^2\,s^{-1}$, le mètre et la seconde étant définis en fonction de c et $\Delta\nu_{Cs}$.

La quantité de matière, symbole n , d'un système est une représentation du nombre d'entités élémentaires spécifiées. Une entité élémentaire peut être un atome, une molécule, un ion, un électron, ou toute autre particule ou groupement spécifié de particules.

LA CANDELA

La candela, symbole cd, est l'unité du SI d'intensité lumineuse, dans une direction donnée. Elle est définie en prenant la valeur numérique fixée de l'efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence 540×10^{12} Hz, K_{cd} , égale à 683 lorsqu'elle est exprimée en $lm\,W^{-1}$, unité égale à $cd\,sr\,W^{-1}$, ou $cd\,sr\,kg^{-1}\,m^{-2}\,s^3$, le kilogramme, le mètre et la seconde étant définis en fonction de h , c et $\Delta\nu_{Cs}$.

L'AMPÈRE

L'ampère, symbole A, est l'unité de courant électrique du SI. Il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la charge élémentaire, e , égale à $1,602\,176\,634 \times 10^{-19}$ lorsqu'elle est exprimée en C, unité égale à $A\,s$, la seconde étant définie en fonction de $\Delta\nu_{Cs}$.

⚠ Il ne faut pas confondre les notations des dimensions avec celles des unités (en particulier M , la dimension masse et m l'unité mètre), ni avec celles qui peuvent être attribuées aux différentes grandeurs dans un exercice.

II Conversions d'unités



Préfixes pour les multiples et sous-multiples

10^{-18}	10^{-15}	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3	10^6	10^9	10^{12}
atto	femto	pico	nano	micro	milli	centi	déci		déca	hecto	kilo	méga	giga	téra
a	f	p	n	μ	m	c	d		da	h	k	M	G	T



Application

Les résultats devront être donnés en notation scientifique, c'est-à-dire sous la forme $a \times 10^n$ avec $a \in [1; 10[$ et n un entier relatif.

Q1. Effectuer les conversions d'unités suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 3 \text{ nm} = \text{_____ m} & 0,015 \text{ } \mu\text{m} = \text{_____ nm} & 0,45 \text{ mm} = \text{_____ } \mu\text{m} \\
 5 \text{ m} = \text{_____ nm} & 3 \text{ m} = \text{_____ km} & 400\,000 \text{ J} = \text{_____ MJ} \\
 0,3 \text{ } \mu\text{m} = \text{_____ m} & 34 \text{ cm} = \text{_____ m} & 50 \text{ GJ} = \text{_____ J} \\
 0,06 \text{ m} = \text{_____ } \mu\text{m} & 41 \text{ km} = \text{_____ m} & 150 \text{ fm} = \text{_____ m} \\
 120 \text{ pm} = \text{_____ nm} & 320 \text{ mm} = \text{_____ m} & 3 \text{ h} = \text{_____ s}
 \end{array}$$

Q2. Effectuer les conversions d'unités de surfaces suivantes :

Rappel : $3 \text{ cm}^2 = 3 \text{ cm} \times \text{cm} = 3 \times 10^{-2} \text{ m} \times 10^{-2} \text{ m} = 3 \times 10^{-4} \text{ m}^2$

$$\begin{array}{lll}
 50 \text{ mm}^2 = \text{_____ m}^2 & 50 \text{ cm}^2 = \text{_____ m}^2 & 45 \text{ nm}^2 = \text{_____ m}^2 \\
 0,0056 \text{ m}^2 = \text{_____ mm}^2 & 50 \text{ mm}^2 = \text{_____ cm}^2 & 5 \times 10^{-6} \text{ m}^2 = \text{_____ } \mu\text{m}^2
 \end{array}$$

Q3. Effectuer les conversions d'unités de volumes suivantes :

Rappels : $3 \text{ cm}^3 = 3 \text{ cm} \times \text{cm} \times \text{cm} = 3 \times 10^{-2} \text{ m} \times 10^{-2} \text{ m} \times 10^{-2} \text{ m} = 3 \times 10^{-6} \text{ m}^3$

Conversion du Litre en mètre cube : $1000 \text{ L} = 1 \text{ m}^3$ ou $1 \text{ L} = 1 \times 10^{-3} \text{ m}^3 = 1 \text{ dm}^3$

$$\begin{array}{lll}
 500 \text{ mm}^3 = \text{_____ m}^3 & 50 \text{ dm}^3 = \text{_____ L} & 45 \text{ m}^3 = \text{_____ L} \\
 0,0056 \text{ m}^3 = \text{_____ cm}^3 & 50 \text{ L} = \text{_____ m}^3 & 5 \times 10^{-6} \text{ m}^3 = \text{_____ } \mu\text{m}^3
 \end{array}$$

III Analyse dimensionnelle

III.1 Équation aux dimensions

♥ Définition

On appelle équation aux dimensions l'écriture de la dimension d'une grandeur physique en fonction des sept dimensions de base. La dimension de la grandeur G est notée $[G]$.

Exemples :

- la grandeur D a la dimension d'une longueur, on note $[D] = L$
- la grandeur Δt a la dimension d'un temps, on note $[\Delta t] = T$
- la grandeur v est une vitesse, définie par $v = \frac{D}{\Delta t}$, on a donc $[v] = \frac{L}{T} = LT^{-1}$

💣 Applications

Pour chaque grandeur physique ci-dessous, établir la dimension et donner l'unité (définie en fonction des 7 unités de base du SI, et éventuellement l'unité usuelle) :

a) l'énergie cinétique E_c

b) le poids P

c) le champ de pesanteur terrestre g

d) la puissance P

e) la pression P

f) la constante de Planck h

III.2 Homogénéité d'un résultat

♥ Très important !

Une équation **doit toujours être homogène**. Pour satisfaire cela :

- les deux membres de l'égalité $A = B$ doivent avoir la même dimension, c'est-à-dire $[A] = [B]$
- les termes d'une somme ou d'une différence doivent avoir la même dimension (on n'ajoute pas des distances avec des masses)
- l'argument x des fonctions mathématiques (e^x , $\cos(x)$, $\ln(x)$, etc.) doit toujours être sans dimension, ces fonctions étant elles-mêmes sans dimension
- les deux membres d'une égalité, d'une somme ou d'une différence doivent être de la même nature scalaire/vectorielle : vecteur = vecteur , scalaire = scalaire

Applications

Tester si les expressions ci-dessous sont homogènes. Pour cela, étudier la dimension de chaque terme des sommes/différences et de part et d'autre du signe égal, puis conclure.

a) $c = \lambda T$, avec c la célérité de l'onde, λ la longueur d'onde et T la période.

$[c] =$

$[\lambda T] =$

donc $[c]$ $[\lambda T]$, donc l'équation $c = \lambda T$ homogène

b) Position d'un point au cours d'une chute libre : $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + z_0$ avec g le champ de pesanteur, v_0 la vitesse initiale et z_0 l'altitude initiale.

III.3 L'analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle sert à contrôler l'homogénéité d'une expression, permettant ainsi de vérifier qu'une formule n'est pas fautive. Elle permet également de déterminer ou retrouver l'expression d'une grandeur, à une constante sans dimension près.

★ Méthode

Si une grandeur X est susceptible de dépendre d'un certain nombre de grandeurs A , B et C caractéristiques du problème et indépendantes, cette grandeur X peut très souvent se mettre sous la forme : $X = kA^\alpha B^\beta C^\gamma$, où k est une constante numérique (sans dimension), et où les exposants α , β et γ peuvent être déterminés par analyse dimensionnelle. **Pour déterminer par analyse dimensionnelle :**

- ❶ Lister les grandeurs dont peut dépendre la grandeur recherchée.
- ❷ Exprimer la grandeur recherchée sous la forme $X = kA^\alpha B^\beta C^\gamma$, où k est une constante sans dimension.
- ❸ Écrire l'équation aux dimensions $[X] = [A]^\alpha [B]^\beta [C]^\gamma$.
- ❹ Poser le système d'équations vérifié par α , β et γ en égalisant les exposants de chaque dimension et le résoudre.
- ❺ Conclure sur l'expression de X .

 **Application 1**

Le satellite Io est en orbite circulaire de rayon R_J autour de Jupiter de masse M_J . Déterminer l'expression, à une constante numérique près, de la période T de Io en fonction de R_J , M_J et de la constante de gravitation universelle \mathcal{G} .

 **Application 2**

Déterminer, par analyse dimensionnelle, la formule de la poussée d'Archimède Π_A en fonction du volume V du corps immergé, de la masse volumique μ du fluide, de l'accélération de pesanteur g et d'une constante numérique.

 **Application 3**

Retour sur l'explosion Trinity (<https://scienceetonnante.com/2021/10/01/analyse-dimensionnelle/> à partir de 14min25s).

- Q1. Taylor s'est basé sur ses connaissances de thermodynamique et de mécanique des fluides pour supposer que le rayon du nuage s'écrit en fonction du temps t s'étant écoulé depuis l'explosion, la masse volumique ρ de l'air et l'énergie E libérée par l'explosion, sous la forme :

$$R(t) = E^a t^b \rho^c$$

où a , b et c sont des constantes. Déterminer ces trois constantes.

- Q2. En déduire l'expression de l'énergie libérée en fonction de R , ρ et t .

- Q3. Estimer l'ordre de grandeur de sa valeur numérique à partir de la photographie (page 1).