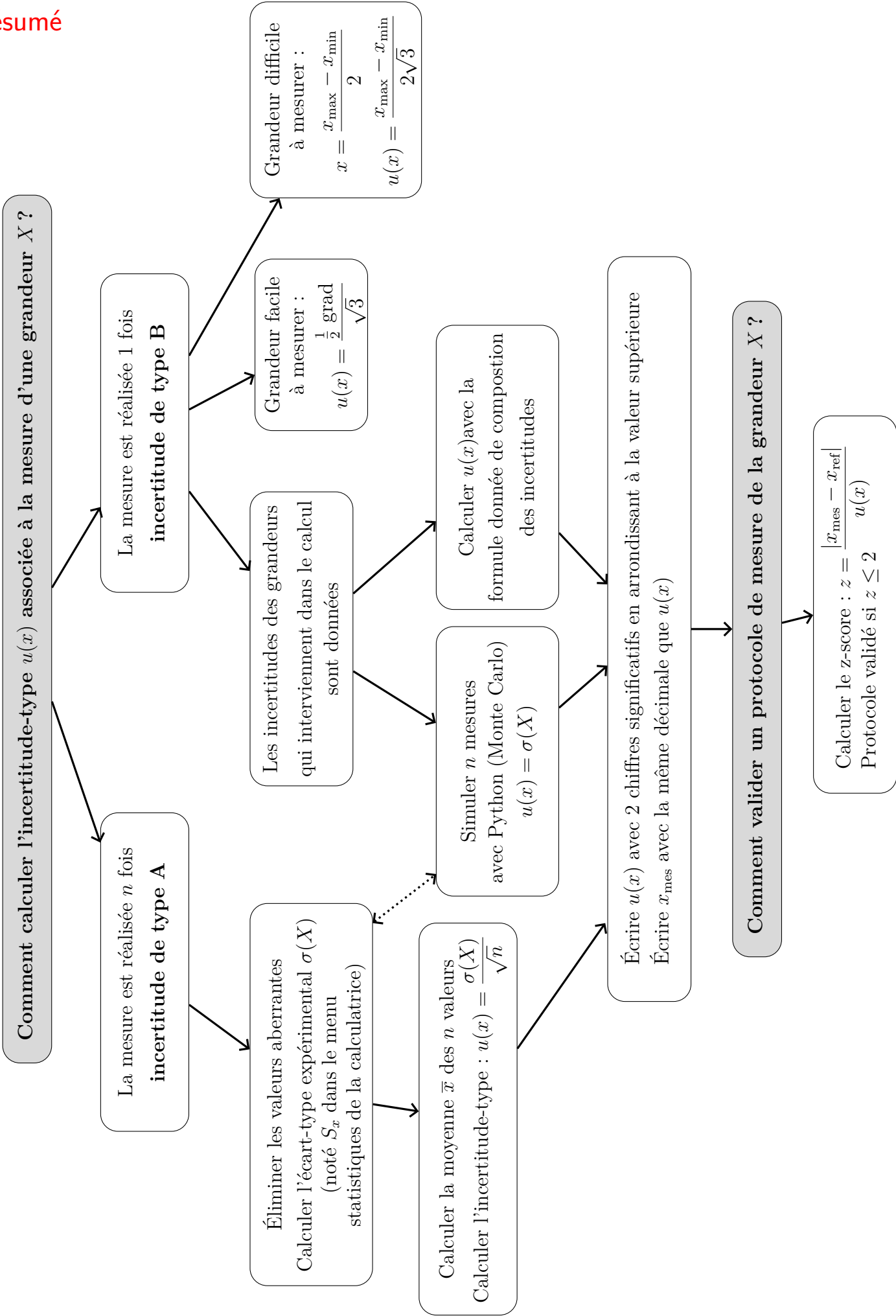
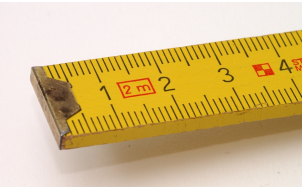


Résumé



# Mesures et incertitudes



Mesurer des grandeurs est une activité fondamentale dans les laboratoires de recherche et l'industrie. Il est nécessaire d'évaluer la confiance que l'on peut accorder à une mesure. Mesurer consiste donc non seulement à rechercher une valeur, mais également associer à cette valeur une incertitude afin de prendre en compte la variabilité de cette mesure.

## Plan du cours

|                                            |          |                                                          |           |
|--------------------------------------------|----------|----------------------------------------------------------|-----------|
| <b>I Mesurage d'une grandeur physique</b>  | <b>2</b> | <b>II.2 Mesure unique : Type B</b>                       | <b>6</b>  |
| I.1 Vocabulaire en métrologie              | 2        | <b>II.3 Mesure indirecte : Incertitude-type composée</b> | <b>8</b>  |
| I.2 Variabilité des résultats              | 2        | <b>III Validité d'un résultat expérimental</b>           | <b>8</b>  |
| I.3 Erreur et incertitude                  | 3        | III.1 Compatibilité entre 2 valeurs                      | 8         |
| I.4 Résultat d'un mesuage                  | 4        | III.2 Modélisation linéaire                              | 9         |
| <b>II Évaluation de l'incertitude-type</b> | <b>5</b> | <b>IV Méthode Monte-Carlo</b>                            | <b>11</b> |
| II.1 Série de mesure : Type A              | 5        | IV.1 Incertitude-type composée avec MC                   | 11        |
|                                            |          | IV.2 Modélisation affine avec MC                         | 12        |

## I Mesurage d'une grandeur physique

### I.1 Vocabulaire en métrologie

#### ♥ Définitions

**Mesurande (nom masculin!) :** nom de la grandeur physique que l'on veut mesurer (exemples : une masse  $m$ , une résistance  $R$ , la période d'un oscillateur  $T$ ).

**Mesurage :** ensemble des opérations permettant de mesurer expérimentalement le mesurande.

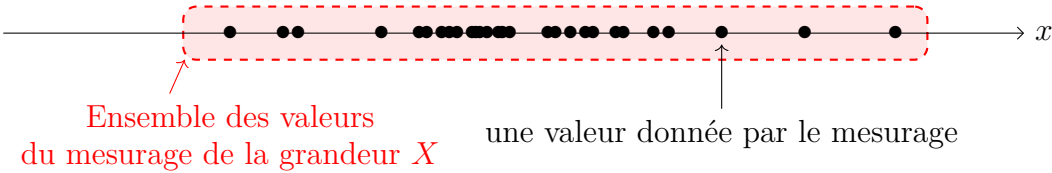
**Valeur vraie ( $x_{\text{vraie}}$ ) :** valeur du mesurande que l'on obtiendrait si le mesurage était parfait, ou une valeur de référence obtenue à partir d'une méthode standard. La valeur vraie du mesurande n'est pas toujours connue.

**Mesure ( $x_{\text{mes}}$ ) :** valeur donnée par le mesurage.

**Résultat du mesurage :** expression complète du résultat.

### I.2 Variabilité des résultats

En science expérimentale, un mesurage est une procédure complexe qui se traduit par une variabilité de la valeur mesurée : une répétition de cette mesure conduit naturellement à une dispersion des valeurs observées. Cette variabilité fait partie du mesurage !



Cette variabilité est liée au fait qu'une série de mesures est soumise à des conditions environnementales qui modifient les résultats obtenus :

- La grandeur à mesurer n'est pas parfaitement définie. Exemples : la largeur d'une table n'est pas un objet défini, la surface d'un liquide n'est pas plane, etc.
- Les conditions environnementales (température, pression, etc.) ne sont pas parfaitement stables.
- L'instrument de mesure est source d'erreur (temps de réponse, exactitude, sensibilité).
- L'opérateur ne refait jamais la même mesure exactement dans les mêmes conditions (fatigue, erreurs de parallaxe, effet de ménisque dans une pipette, etc.)



### Remarque

Une mesure comporte en général plusieurs opérations dont chacune peut être source de variabilité. Il sera important de savoir distinguer les sources de variabilité importante de celles qui sont négligeables.

## I.3 Erreur et incertitude



### Vocabulaire

**Erreur de mesure** : c'est la différence entre la valeur mesurée et la valeur vraie ( $= |x_{\text{mes}} - x_{\text{vraie}}|$ )

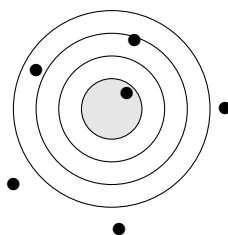
**Incertitude de mesure** : c'est un paramètre qui caractérise la dispersion des valeurs autour d'une valeur moyenne des différentes valeurs mesurées d'un mesurande. Elle peut être vue comme un « doute » sur la valeur mesurée.



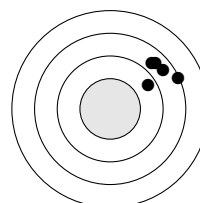
### Remarques

- Il ne faut pas confondre erreur et incertitude : une grande incertitude implique une plus grande chance d'erreur, mais une faible erreur n'implique pas une faible incertitude, ça peut être un coup de chance !
- On envisage traditionnellement qu'une erreur possède deux composantes :
  - une composante aléatoire : elle provient des variations temporelles et spatiales non prévisibles de grandeurs d'influence,
  - une composante systématique : elle provient d'un effet reconnu d'une grandeur d'influence, qui peut être quantifié, et s'il est significatif par rapport à la précision requise du mesurage, une correction est appliquée au résultat.

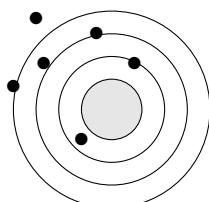
juste mais pas fidèle  
valeurs centrées mais dispersées  
erreurs aléatoires



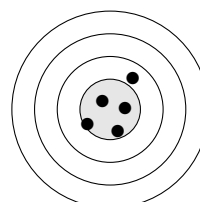
fidèle mais pas juste  
valeurs décentrées mais resserrées  
erreurs systématiques



ni juste ni fidèle  
erreurs aléatoires et systématiques

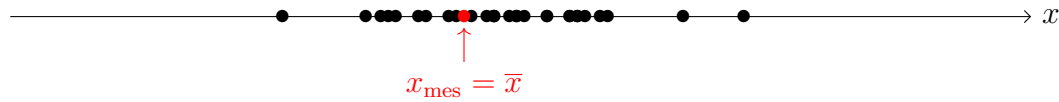


fidèle et juste  
erreurs faibles



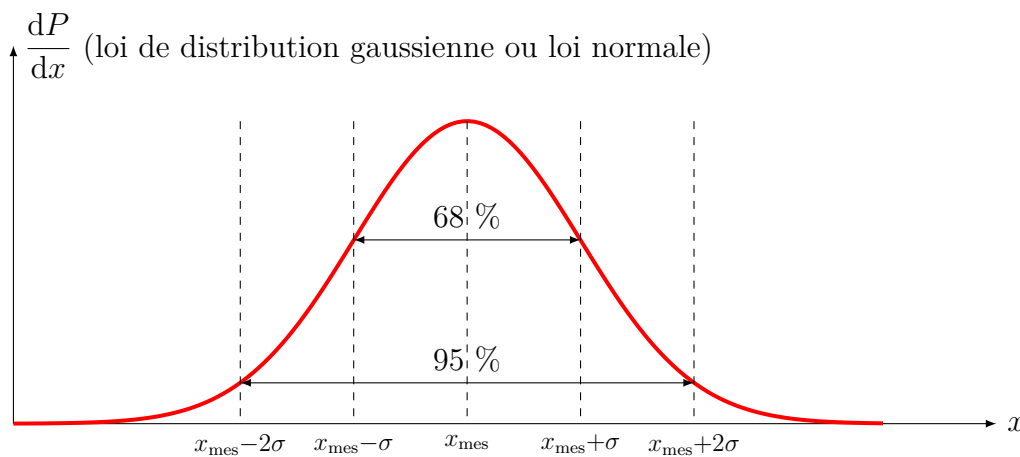
## I.4 Résultat : meilleur estimateur et incertitude-type associée à un mesurage

Donner le résultat du mesurage d'une grandeur physique modélisée par une variable aléatoire  $X$ , c'est donner la meilleure estimation de sa valeur vraie et caractériser la dispersion des valeurs qu'elle peut prendre. Ainsi, le résultat d'un mesurage n'est pas une valeur unique mais un ensemble de valeurs numériques, raisonnablement attribuables au mesurande. Si on place sur un axe un ensemble  $\{x_1, \dots, x_N\}$  de  $N$  mesures de la valeur d'une grandeur  $X$  :



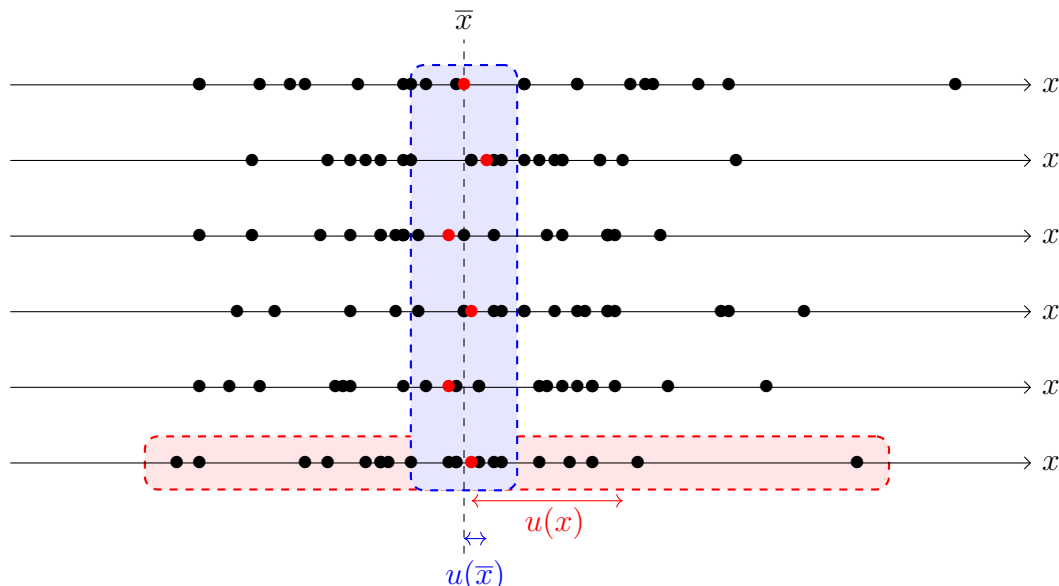
En l'absence d'erreur systématique (erreur de protocole, défaut d'un appareil) :

- La meilleure estimation de la valeur  $x_{\text{vraie}}$  est obtenue en faisant la moyenne des valeurs mesurées (il n'y a pas de raison pour que les résultats se répartissent plus d'un côté que de l'autre) :  $x_{\text{mes}} = \bar{x}$
- La mesure de  $x$  suit une loi normale centrée sur  $x_{\text{mes}}$  d'écart-type  $\sigma$ , que l'on définit comme l'écart-type expérimental d'une mesure (ou écart-type de répétabilité).



### Remarque

$\sigma$  est le paramètre qui caractérise la dispersion des valeurs prises par  $X$  (incertitude sur **un** mesurage). Si on effectue  $n$  mesures lors du mesurage,  $\bar{x}$  est une moyenne parmi d'autres possibles : si on refaisait à nouveau  $n$  mesures, on obtiendrait une autre moyenne. D'après la théorie des probabilités, la distribution de l'ensemble des moyennes est bien moins dispersée que l'ensemble des mesures uniques (la dispersion est divisée par  $\sqrt{n}$ ), ce qui est cohérent avec l'idée « pragmatique » que l'estimation à partir d'une moyenne est « meilleure » que sur une mesure seule.



### ★ Méthode : notation

Tout résultat expérimental doit être accompagné d'une **incertitude de mesure** et d'une **unité** :

$$X = (x_{\text{mes}} \pm u(x)) \text{unité}$$

où  $u(x)$  est l'incertitude-type sur la mesure.

On écrit l'incertitude-type avec **2 chiffres significatifs** (arrondi au supérieur), et le chiffre significatif de  $x_{\text{mes}}$  doit coïncider avec le dernier chiffre significatif de  $u(x)$ .

### Application

Les résultats suivants sont-ils écrits correctement ? Si non, les corriger.

$$R = 18,3 \pm 0,21 \Omega$$

$$R = 11,34 \pm 0,16 \Omega$$

$$R = 16 \pm 0,102 \Omega$$

$$R = 18,367 \pm 0,20 \Omega$$



### Remarques

- On donne parfois l'**incertitude de mesure relative** :  $100 \times \frac{u(x)}{x_{\text{mes}}}$  exprimée en %
- Ce n'est pas la résolution de l'instrument de mesure qui fixe le nombre de chiffres significatifs de la valeur mesurée.

## II Différents modes d'évaluation de l'incertitude-type sur une grandeur

### II.1 Série de mesures : évaluation de type A de l'incertitude-type



### Type A (approche statistique)

Si une grandeur  $X$  est estimée à partir de  $n$  observations répétées indépendantes  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , et si  $\sigma(X)$  est l'écart-type expérimental d'une mesure (obtenu à partir de ces  $n$  valeurs), alors :

— Sa meilleure estimation est donnée par la moyenne des  $n$  valeurs :  $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

— L'incertitude-type  $u(x)$  sur son estimation  $\bar{x}$  vaut  $u(x) = \sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

avec  $\sigma(X) = \text{écart-type expérimental de la série de mesures} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ , donné sous le nom  $S_x$  dans le menu statistique de la calculatrice.



### Remarques

- L'incertitude type  $u(x)$  correspond à l'écart-type de la moyenne ( $\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ )
- $u(x)$  dépend de la nature du protocole expérimental mis en œuvre, du matériel utilisé, des conditions expérimentales et de l'habileté des expérimentateurs.
- Pour utiliser une incertitude de type A, il faut au minimum 5 à 10 mesures, mais c'est inutile de dépasser 20 mesures (une augmentation de  $n$  diminue l'incertitude-type mais cette diminution n'est pratiquement plus efficace au delà de  $n = 10$  mesures)

## Application

On effectue 10 mesures de la résistance  $R$  d'un conducteur ohmique, les résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous (valeurs en  $\Omega$ ) :

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 523,6 | 523,5 | 523,4 | 523,5 | 523,6 | 523,4 | 523,5 | 523,5 | 523,6 | 523,4 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|

Q1. Déterminer (avec le menu « statistiques » de la calculatrice) :

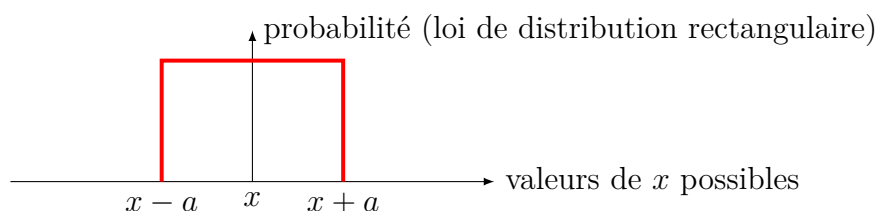
- (a) La valeur moyenne de  $R$  :
- (b) L'écart-type expérimental de la série de mesures :
- (c) L'écart-type sur la moyenne :

Q2. Écrire correctement le résultat du mesurage.

## II.2 Mesure unique : évaluation de type B de l'incertitude-type

Dans le cas d'une mesure  $x$  isolée (ce qui est le plus fréquent en TP!), on procède à l'évaluation de l'erreur possible (= précision de la mesure, notée  $a$ ), qui va déterminer l'incertitude-type sur la mesure. N'ayant aucune information sur la distribution de probabilité en dessous de cette précision, on privilégie la distribution uniforme de probabilité : l'incertitude-type sera évaluée avec la loi rectangulaire :

**Loi rectangulaire** : on estime que la valeur vraie  $x_{\text{vraie}}$  a « autant de chances » de prendre n'importe quelle valeur entre  $x - a$  et  $x + a$ , avec  $a$  la précision de la mesure.



### Type B (approche probabiliste)

L'incertitude-type dans le cas d'une loi rectangulaire est liée à la précision par :  $u(x) = \frac{\text{précision}}{\sqrt{3}}$



### Estimation de la précision, notée $a$

- La précision  $a$  des **instruments de mesure gradués** est égale à une **demi-graduation**.
- La précision d'un **multimètre** est donnée par le constructeur de l'appareil : «  $n\%L + n \text{ dgt}$  », ou «  $n\%L + n\text{UR}$  », ce qui signifie :  $n\%$  de la valeur lue +  $n$  digit  
1 digit (dgt), ou 1 Unité de Représentation (UR) correspond à l'unité du dernier chiffre affiché à droite de l'écran, c'est-à-dire la plus petite valeur qui puisse être affichée sur le calibre choisi.
- En chimie, la précision est donnée par la tolérance inscrite sur la verrerie (exemple : fiole jaugée de  $500 \text{ mL} \pm 0,25 \text{ mL}$  donc  $a = 0,25 \text{ mL}$ ).
- La précision d'une méthode de mesure est parfois à déterminer expérimentalement.



### Remarques

- Pour un appareil à lecture double sur une échelle graduée (règle, balance avec tare, etc.) : il y a deux causes d'erreur (lors de la mesure du zéro ou du tarage et lors de la lecture

finale). L'erreur due à la résolution va se produire deux fois mais il est probable qu'il y ait une compensation partielle des erreurs : il faut alors multiplier le demi-intervalle sur une mesure par  $\sqrt{2}$ .

- Lorsque lors d'une mesure, il y a plusieurs sources d'incertitude, il faudrait, pour être rigoureux, tenir compte de toutes. Dans ce cas, l'incertitude-type totale au carré est la somme des carrés de chaque incertitude-type associée à chaque erreur. Cependant, pour simplifier, nous ne garderons que celle dont l'influence est la plus grande soit, dans l'ordre de priorité décroissante :
  1. les incertitudes de repérage par un expérimentateur
  2. les incertitudes de lecture
  3. les incertitudes liées à un appareil

## Applications :

Déterminer dans chaque mesurage la valeur et l'incertitude-type, puis écrire le résultat de la mesure :

### Thermomètre



### Baromètre (unité mbar)



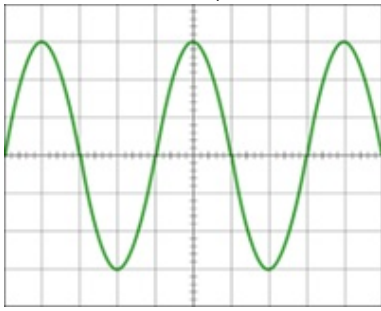
### Fiole jaugée (pleine)



### Multimètre utilisé en ampèremètre (précision : $0,5\%L + 0,5 \text{ dgt}$ )



### Oscilloscope (mesure de $T$ ) calibre 10 ms/DIV



### Règle



## II.3 Évaluation de l'incertitude-type composée (mesure indirecte)

On cherche à obtenir la valeur  $z$  d'une grandeur  $Z$  à partir de la mesure effective d'autres grandeurs ( $X$  et  $Y$ ) dont elle dépend.

On connaît la relation théorique entre les diverses grandeurs  $Z(X, Y)$ . L'incertitude sur  $z$  est directement reliée à l'incertitude sur les mesures  $x$  et  $y$ .



### Incertitude-type composée

| Relation                  | $Z = X + Y$                     | $Z = X - Y$ | $Z = X \times Y$                                                                          | $Z = \frac{X}{Y}$ |
|---------------------------|---------------------------------|-------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|
| Incertitude-type composée | $u(z) = \sqrt{u(x)^2 + u(y)^2}$ |             | $\frac{u(z)}{ z } = \sqrt{\left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{u(y)}{y}\right)^2}$ |                   |

Dans les cas où la relation  $Z(X, Y)$  est plus compliquée que celles données ci-dessus, l'énoncé vous fournira la formule reliant l'incertitude sur  $z$  aux incertitudes de mesure (ou le logiciel Gum\_MC : [http://jeanmarie.biansan.free.fr/gum\\_mc.html](http://jeanmarie.biansan.free.fr/gum_mc.html)).

## III Validité d'un résultat expérimental

### III.1 Compatibilité entre 2 valeurs



### Écart normalisé et z-score

**Écart normalisé**  $E_N$  entre 2 valeurs mesurées  $x_1$  et  $x_2$  assorties des incertitudes  $u_1$  et  $u_2$  :

$$E_N = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}$$

**Z-score**  $z$  entre une valeur mesurée  $x_{\text{mes}}$  assortie de l'incertitude  $u(x)$  et une valeur de référence  $x_{\text{ref}}$  :

$$z = \frac{|x_{\text{mes}} - x_{\text{ref}}|}{u(x)}$$

**Critère** : 2 valeurs sont compatibles si  $E_N < 2$  ou  $z < 2$ .

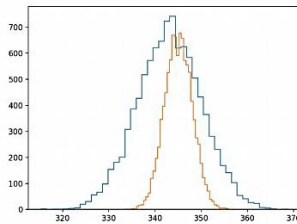




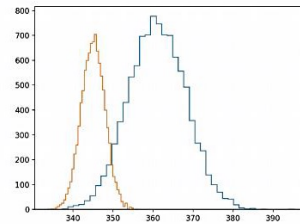
## Remarques

- Le choix du seuil est arbitraire mais utilisé dans de nombreux domaines. Il est lié au fait que l'intervalle  $[x_{\text{mes}} - 2u(x); x_{\text{mes}} + 2u(x)]$  est un intervalle de confiance à 95% pour une distribution qui suit une loi normale. Si  $z < 2$ , la compatibilité de  $x_{\text{mes}}$  et  $x_{\text{ref}}$  est assurée avec une probabilité d'environ 95%.
- Si l'écart normalisé est supérieur à 2, les résultats ne sont pas compatibles. Il faut chercher les origines de cette incompatibilité : variabilité des mesures, erreur de manipulation de calcul, sous-estimation des incertitudes, etc.

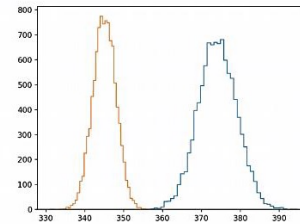
Les 3 graphiques ci-dessous représentent des distributions avec en écart normalisé  $z$  :



$z = 0,3$



$z = 2,1$



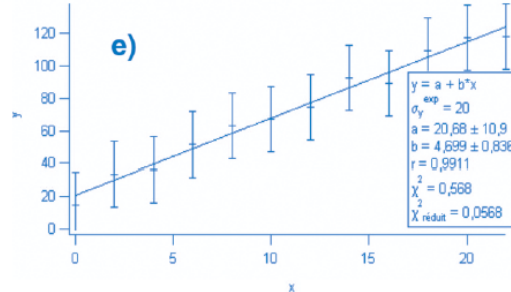
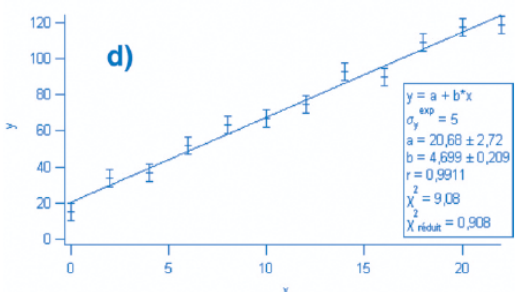
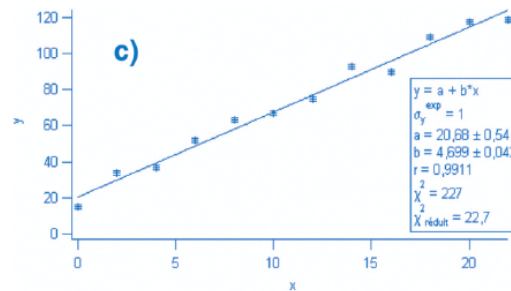
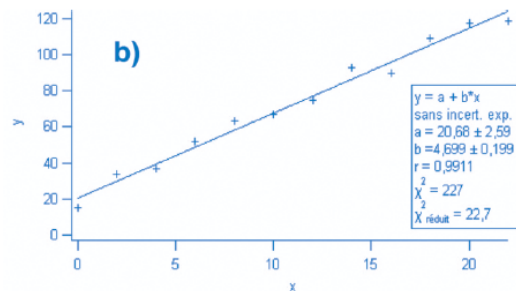
$z = 5,0$

## III.2 Modélisation linéaire

La vérification d'une loi passe souvent par le tracé d'un graphe, on cherche alors à **représenter une droite afin de conclure facilement sur la validité (ou non) de la loi**.

### Coefficient de corrélation :

On a représenté ci-dessous les mêmes mesures expérimentales, mais avec des incertitudes différentes. Pour vérifier si la loi étudiée expérimentalement est affine, on effectue une régression linéaire.



Pour caractériser l'alignement des points expérimentaux, la calculatrice ou le logiciel (Excel/Openoffice) propose un coefficient appelé coefficient de corrélation linéaire  $r$  (ou  $r^2$ ). Il est égal à 1 si la relation est linéaire et s'en écarte si ce n'est pas le cas. Cependant ce coefficient ne permet pas de déterminer si l'écart à 1 est dû aux incertitudes de mesure ou si cet écart est dû au fait que la relation n'est pas linéaire. L'exemple ci-dessus montre que ce coefficient est le même quelles que soient les incertitudes. Si l'on peut croire à la pertinence de l'ajustement dans le cas d), il est plus difficile de s'en convaincre dans les autres cas.

 Le coefficient de corrélation n'est donc pas pertinent pour vérifier une relation linéaire entre les données.

L'existence d'une droite moyenne ne suffit pas à conclure sur la linéarité de la relation. Il faut en plus étudier la répartition des points expérimentaux par rapport à la droite moyenne, et les incertitudes.

### ★ Méthode

Pour tester une relation linéaire entre 2 grandeurs mesurées, il faut utiliser un logiciel de régression linéaire **intégrant les barres d'incertitude** :

- Pour vérifier que les valeurs mesurées sont compatibles avec un modèle affine, il faut observer l'alignement des points sur la droite de régression.
- Pour vérifier que les incertitudes-types sont compatibles avec le modèle affine, il faut vérifier que la droite de régression passe suffisamment près des points de mesures en tenant compte des barres d'incertitudes.



### Remarques

- Lors d'une régression linéaire avec présence de barres d'incertitude, Regressi donne une incertitude sur les coefficients de la droite d'ajustement  $a$  et  $b$ . Cette incertitude est une incertitude élargie correspondant à un niveau de confiance de 95%.
- On peut également utiliser une méthode numérique pour évaluer les incertitudes-types sur les coefficients  $a$  et  $b$  du modèle. Cette méthode appelée Monte-Carlo consiste à générer des ensembles de nouvelles mesures  $(x_i, y_i)$  puis réaliser une nouvelle régression linéaire. En réalisant un grand nombre de fois cette opération, on obtient, en prenant les écarts-types, les valeurs des incertitudes-types sur les coefficients  $a$  et  $b$  du modèle.

Une régression complète ne se limite pas à l'obtention des paramètres de la droite de régression : il est indispensable de valider le modèle estimé, c'est-à-dire de vérifier son adéquation aux données analysées.



### Méthode : analyse des résidus

**Résidus  $e$**  : écarts « verticaux » entre les points de mesure et la droite de régression.

Ainsi, si la droite de régression a pour équation  $y = ax + b$  : à chaque valeur  $x_i$  on peut associer l'estimation  $ax_i + b$  de  $Y$  donnée par la droite de régression, et la comparer à la valeur observée  $y_i$  : on obtient ainsi le résidu  $e_i = y_i - (ax_i + b)$ .

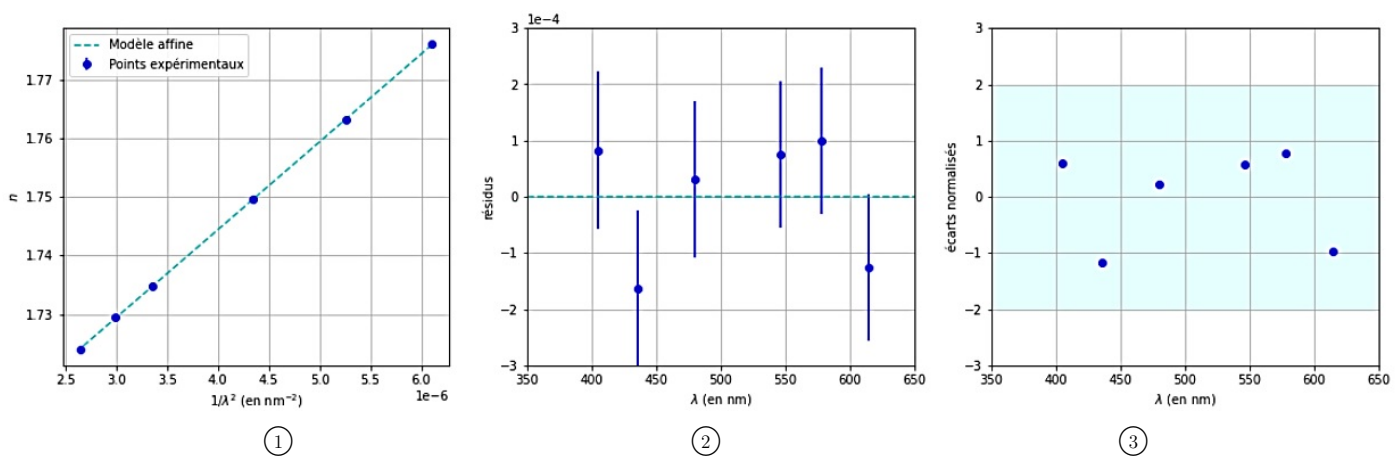
- Si le point expérimental appartient à la droite de régression (cas « idéal »), on obtient un résidu nul :  $e_i = 0$  ;
- Sinon, on regarde si ces résidus sont bien aléatoirement distribués autour du 0 **et** si ils sont bien inférieurs 2 fois la valeur de l'incertitude-type sur  $y_i$ .



### Remarques

- si  $e_i \gg 2u(y_i)$ , on peut considérer que le point est aberrant (attention ! il faut le documenter !) et l'éliminer de la liste.
- Pour visualiser facilement ces différents cas, on représente graphiquement les résidus  $e_i$  en fonction des  $x_i$ , en mettant en évidence les barres d'erreur  $u(y_i)$  → graphique ② ci-après.

- On peut aussi calculer les résidus normalisés :  $\frac{e_i}{u(y_i)}$ , ce qui revient à calculer les z-scores de chaque  $y_i$  que l'on souhaite comparer à la valeur estimée avec la régression linéaire. Pour valider l'adéquation d'un modèle linéaire pour le nuage de points expérimentaux, il faut que les z-scores soient bien tous inférieurs à 2 → graphique ③ ci-après.



## IV Méthode Monte-Carlo pour estimer les incertitudes-types

### IV.1 Estimation d'une incertitude-type composée par la méthode Monte-Carlo

Soit une grandeur physique  $Z$  définie par une fonction de la variable expérimentale  $X$ . La méthode de Monte-Carlo consiste à calculer un grand nombre de valeurs de  $Z$  pour différentes valeurs des  $X$  tirées aléatoirement dans l'intervalle  $[x_{\text{mes}} - u(x), x_{\text{mes}} + u(x)]$  avec  $u(x)$  l'incertitude-type évaluée lors de la mesure de  $x$ . Le script déduit ensuite de l'ensemble des valeurs  $z_i$  obtenues la valeur moyenne et l'écart-type sur la distribution.



#### Remarques

- Dans le cas où la relation donnant  $Z$  fait intervenir plus d'une variable, la méthode reste la même, il faut simuler des jeux de données des différentes variables pour calculer ensuite la distribution de valeurs de  $Z$ .
- En l'absence d'informations pour savoir de quelle façon générer les valeurs des points simulés, on choisit une distribution de probabilité uniforme.

#### ★ Principe

On cherche à estimer une grandeur  $y$  donnée par  $y = f(x_1, x_2, \dots)$  avec les  $x_i$  des données résultant d'une mesure et  $f$  une fonction connue.

Chaque  $x_i$  est caractérisé par sa valeur et son incertitude-type  $u(x_i)$ .

- Fixer un nombre  $N$  de simulations à réaliser ;
- Pour chaque simulation  $k$ ,  $k$  compris entre 1 et  $N$  :
  - réaliser un tirage aléatoire pour chaque  $x_i$  en tenant compte de sa variabilité ;
  - utiliser les valeurs de ce tirage et la fonction  $f$  pour calculer la valeur  $y_k$  associée au tirage ;
  - sauvegarder cette valeur  $y_k$  ;
- Déterminer la moyenne des  $y_k$ , qui donne la valeur de  $y$ , et l'écart-type de la distribution des  $y_k$ , qui donne l'incertitude-type de  $y$ .

Exemple : Script Python permettant de déterminer la largeur de la fente et l'incertitude-type associée lors de l'étude du phénomène de diffraction

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Définition de la fonction reliant les grandeurs
def fente(lamda,D,L):
    return 2*lamda*D/L

# Définition des valeurs mesurées et leur incertitude-type
lamda,u_lamda=650,0.5 # en nm
D,u_D=2,0.01 # en m
L,u_L=26,2 # en mm

# Nombre de simulation de données
n_sim=1000

# Simulation des données
tableau_lamda=np.random.normal(lamda,u_lamda,n_sim)
tableau_D=np.random.normal(D,u_D,n_sim)
tableau_L=np.random.normal(L,u_L,n_sim)
tableau_fente=fente(tableau_lamda,tableau_D,tableau_L)

# Affichage des résultats
print("valeur mesurée de la fente en µm:",np.mean(tableau_fente))
print("incertitude-type u(fente) en µm:",np.std(tableau_fente, ddof=1))
```

## IV.2 Modélisation affine avec la méthode de Monte-Carlo

Lorsqu'on souhaite évaluer les incertitudes sur les paramètres  $a$  et  $b$  d'une modélisation affine des grandeurs expérimentales  $x$  et  $y$  (telle que  $y = ax + b$ ), on peut effectuer une simulation Monte-Carlo en réalisant un très grand nombre de régressions linéaires sur des séries de points générés aléatoirement à partir de chaque point  $x_i, y_i$ , à l'aide de leurs incertitudes-types expérimentales  $u(x_i)$  et  $u(y_i)$ . Rappel : pour une distribution uniforme de demi-étendue  $a$  :  $u(x) = \frac{a}{\sqrt{3}}$ .

Les valeurs finales de la pente et de l'ordonnée à l'origine sont les moyennes de toutes leurs valeurs, et leurs incertitudes-types sont les écarts-types de ces deux ensembles de valeurs.

### ★ Principe

On souhaite évaluer les incertitudes sur les paramètres  $a$  et  $b$  d'une modélisation affine des grandeurs expérimentales  $x$  et  $y$  (telle que  $y = ax + b$ ). On note  $m$  le nombre de points de mesures.

- ① Réaliser une régression linéaire unique pour estimer la pente et l'ordonnée à l'origine.
- ② Fixer un nombre  $N$  de simulation très grand (typiquement  $N = 100000$ ).
- ③ Créer deux listes vides pour stocker les pentes et les ordonnées à l'origine des régressions.
- ④ Pour chaque  $i$  compris entre 1 et  $N$ , réaliser :
  - pour chaque  $j$  compris entre 1 et  $m$ , réaliser un tirage aléatoire d'une valeur de  $Y_j$  donnée par une loi de probabilité uniforme entre  $y_j - \sqrt{3} \times u(y_j)$  et  $y_j + \sqrt{3} \times u(y_j)$  ;
  - pour chaque  $j$  compris entre 1 et  $m$ , réaliser un tirage aléatoire d'une valeur de  $X_j$  donnée par une loi de probabilité uniforme entre  $x_j - \sqrt{3} \times u(x_j)$  et  $x_j + \sqrt{3} \times u(x_j)$  ;
  - réaliser une régression linéaire sur cet ensemble  $(X_j, Y_j)$  puis ajouter dans les listes la pente et l'ordonnée à l'origine de cette régression.
- ⑤ Calculer les écarts-types des deux listes des pentes et des ordonnées à l'origine pour obtenir les incertitudes-types ; tracer sur un graphique la droite obtenue avec la pente moyenne et l'ordonnée à l'origine moyenne ;
- ⑥ Superposer sur le même graphique les points de mesures en indiquant leurs incertitudes-type sous la forme de barres d'erreur.